Die 3-Punkte-Regel bei Fußballturnieren mathematisch analysiert - oder: Warum es wahrscheinlicher ist die Hauptrunde mit 5 Punkten anstatt mit 6 Punkten zu erreichen.

DANIEL HABECK UND HANS-STEFAN SILLER, UNIVERSITÄT KOBLENZ-LANDAU, CAMPUS KOBLENZ UND UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Zusammenfassung: *Für diesen Beitrag haben wir uns dem bereits oft diskutierten Thema Fußball angenommen und betrachten mit Hilfe elementarer kombinatorischer Überlegungen die Punkte-Regelung. Präziser formuliert geht es darum, die 3-Punkte-Regel für Fußballturniere als Ausgangspunkt zu (kombinatorischen) Überlegungen hinsichtlich der Erst- bzw. Zweitplatzierung in einer Gruppe mit 4 Mannschaften zu verwenden. Dieser Ansatz ist in der Form bislang noch nicht in der Literatur aufgegriffen und verfolgt worden und ergänzt das in der Literatur auffindbare Spektrum von Ausarbeitungen rund um das Thema Fußball. Die vorliegende Modellierung wird durch eine Analyse der Weltmeisterschaften von 1982 - 2014 unterstützt.*

Die gezeigte Modellierung macht auch deutlich, dass (sinnvolle) Annahmen zur Umsetzung im Unterricht unumgänglich sind. Erweiterungen der Thematik, z.B. in der Fortführung auf Wettquoten, ist nicht Teil dieses Beitrags, allfällige mögliche Ergänzungen werden aber am Ende des Artikels angeführt.

1 Einleitung

Alltägliche Problemstellungen können für einen anregenden Mathematikunterricht relevante und wichtige Themen bereitstellen. So ist das auch in der Welt des Fußballs, wie unterschiedliche Aufbereitungen in diesem Themenfeld, erwähnt seien dazu Beiträge von H. K. Strick (1982), Danckwerts und Vogel (1985), Schwarz (2000), Ludwig (2006), Ludwig (2014), Lambert (2014) oder Siller und Maaß (2009), zeigen. Allen diesen Beispielen ist gemeinsam, dass sie auf (elementare) Überlegungen der Kombinatorik und/oder Wahrscheinlichkeitsrechnung zurückgreifen.

Die Motivation für unseren Beitrag liegt darin, das (bekannte) Punkte-Regelwerk im Fußball - nämlich die 3-Punkte-Regel - mit Hilfe mathematischer Betrachtungen für den Unterricht greifbar zu machen. Da dieses Thema, abhängig vom Kontext, z. B. die 3-Punkte-Regel in der (deutschen) Bundesliga oder die 3-Punkte-Regel bei Fußball-Großereignissen (wie Europa- oder Weltmeisterschaften), zu unterschiedlichen Betrachtungen führt, konzentrieren wir uns in diesem Beitrag auf das Regelwerk der Fifa bei Weltmeisterschaften. Die Gründe dafür sind naheliegend: das Regelwerk der Fifa bei solchen Turnieren ist einsehbar, die Spielhistorie für Gruppenspiele kann recherchiert werden und Weltmeisterschaften finden zu regelmäßig wiederkehrenden Zeitpunkten statt. Zudem sind wir überzeugt, dass dieser Thematik ein für den Mathematikunterricht spannender Ansatz, der mit Hilfe elementarer kombinatorischer Überlegungen verfolgt werden kann, zugrunde gelegt werden kann.

Das Thema an sich ist für den Mathematikunterricht als Querschnittsthema aufgreifbar; so kann es sowohl als Einstieg in die Kombinatorik genutzt werden, es kann aber auch zu einem späteren Zeitpunkt (wieder) aufgegriffen werden, insbesondere wenn der Unterschied zwischen den Begriffen *Wahrscheinlichkeit* und *bedingter Wahrscheinlichkeit* erklärt wird. Ein schulpraktischer Einstieg in die Stochastik - mit Hilfe dieser Thematik - ist aufgrund der notwendigen Vorkenntnisse im Bereich des kombinatorischen Wissens, der relativen Häufigkeiten sowie zur bedingten Wahrscheinlichkeit kaum möglich.

2 Hinführung zur Thematik *Punkte-Regel*

Wir haben die Fußballweltmeisterschaftsturniere bis einschließlich 1994 ausgewertet und erkannt, dass man mit zwei Siegen und einer Niederlage eher in der Gruppenphase ausscheidet als mit einem Sieg und zwei Remis, obwohl in der ersten Konstellation mit 6 Punkten gegenüber 5 in der zweiten sogar mehr Punkte erreicht werden. Gleiches stellt man auch fest, wenn man die Turniere 1982-1990 betrachtet, d.h. diese Beobachtung ist unabhängig von der durchgeführten Bepunktung des Sieges - 2 Punkte bis inkl. 1990, danach 3 Punkte für einen Sieg. Auffällig dabei ist, dass seit der Einführung der 3-Punkte-Regel keine Mannschaft mit 3 Punkten durch einen Sieg und zwei Niederlagen in die Hauptrunde eingezogen ist, obwohl dieses Ereignis insgesamt 22 Mal eingetroffen ist. Dagegen haben 3 Punkte durch drei Remis immerhin in $\frac{1}{3}$ der Fälle zum Weiterkommen gereicht.

Obwohl alle Überlegungen für die 2-Punkte-Regel erweitert werden können, beschränken wir uns in diesem Beitrag aber auf die 3-Punkte-Regel und betrachten dabei eine Vorrundengruppe mit 4 Mannschaften - welche wir mit A, B, C und D bezeichnen. Wir ermitteln, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine in der Vorrunde erzielte Punktzahl zum Weiterkommen, d.h. einem der ersten beiden Tabellenplätze, reicht. Durch die Bepunktung 3 Punkte für einen Sieg (S), 1 Punkt für ein Remis (R) bzw. 0 Punkte für eine Niederlage (N) zeigt die nachfolgende Tab. 1, welche Ereignisse zu untersuchen sind:

Ereignis	**Summe der erspielten Punkte**
R R N	2
S N N	3
R R R	3
S R N	4
S R R	5
S S N	6

Tab. 1: Mögliche Ereignisse und Punktzahl für 3-Punkte-Regel

Die zu den Punktzahlen 0, 1, 7 und 9 gehörenden Ereignisse sind in Tab. 1 nicht aufgeführt, da in dieser Situation das Ausscheiden (für 0 oder 1 Punkt) bzw. Weiterkommen (für 7 oder 9 Punkte) sicher ist.
Für die in Tab. 1 aufgelisteten Vorrundenergebnisse bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Team tatsächlich in die Hauptrunde einzieht, d.h. einen der beiden ersten Gruppenplätze belegt, wenn man annimmt, dass dieses Team in der Vorrunde ein bestimmtes Ereignis (z.B. SSN) erreicht.
Bevor wir mit unseren Überlegungen jedoch im Detail beginnen, möchten wir nochmals zwei Aspekte herausstellen:

- Um die hier angestellten Überlegungen elementar zu halten und nicht zu umfangreich werden zu lassen, nehmen wir vereinfachend an, dass die Mannschaften gleich stark und die Spielausgänge unabhängig voneinander sind. Auf diese Weise sind nur kombinatorische Überlegungen erforderlich, zudem werden Grundkenntnisse zu (bedingter) Wahrscheinlichkeit benötigt.

- Bei Punktgleichheit zwischen mehreren Mannschaften auf Platz 1 oder 2 entscheidet ein Los über die Rangfolge. Die Erfolgschancen, bei einem solchen Losverfahren mindestens Gruppenzweiter zu werden, bezeichnen wir als Erfolgsfaktor. Liegt das betrachtete Team mit $n \geq 1$ anderen Mannschaften punktgleich an der Spitze der Abschlusstabelle, so betragen die (Los-)Chancen auf den ersten oder zweiten Gruppenplatz $\frac{2}{n+1}$. Steht dagegen ein Team allein auf Rang 1 und die betrachtete Mannschaft mit $1 \leq m \leq 2$ weiteren Teams punktgleich dahinter, so ist der Erfolgsfaktor durch $\frac{1}{m+1}$ gegeben. Da in allen anderen Tabellenbildern der Erfolgsfaktor 1 oder 0 ist, nimmt der Erfolgsfaktor somit nur die Werte $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ oder 0 an.

Da wir also gleichstarke Mannschaften und die Unabhängigkeit der Spielreihenfolge voraussetzen, reicht es wegen dieser "Symmetrie", sich bei den Berechnungen auf ein spezielles Team zu konzentrieren. Wir haben Team A gewählt!
Nachfolgend ermitteln wir für Mannschaft A die Wahrscheinlichkeit $P(A|X)$ mit den durch Ereignis X erspielten Punkten tatsächlich in die Hauptrunde einzuziehen, d.h. einen der beiden ersten Gruppenplätze zu belegen. So bezeichnet etwa $P(A|SRR)$ die Wahrscheinlichkeit, dass Team A einen der beiden ersten Gruppenplätze belegt, wenn man voraussetzt, dass A in der Vorrunde einen Sieg und zwei Unentschieden erspielt.

3 Berechnung von $P(A|X)$ für die 3-Punkte-Regel

Bevor wir exemplarisch die Ereignisse SRR, SSN sowie RRR untersuchen, sei die Vorgehensweise kurz dargelegt: In einer Vierergruppe gibt es 6 Spiele, bei denen maximal 18 Punkte vergeben werden. Insgesamt ergeben sich dadurch $3^6 = 729$ mögliche Tabellenkonstellationen. Da nach Annahme alle Teams gleich stark sind, ist jede dieser Tabellenkonstellationen (mit $p = (\frac{1}{3})^6$ Eintrittswahrscheinlichkeit) gleich wahrscheinlich. Mit der Bezeichnung A für das Ereignis "A kommt weiter" muss für die Berechnung von $P(A|X) = \frac{P(A \cap X)}{P(X)}$ ermittelt werden, in wie vielen Fällen Team A das Ereignis X erreicht bzw. in wie vielen dieser Tabellenkonstellationen es - unter Berücksichtigung des Erfolgsfaktors - tatsächlich zum Hauptrundeneinzug reicht. Dazu ist es sinnvoll, zunächst die Spiele mit Beteiligung von Team A zu betrachten und anschließend die übrigen 3 Partien der Mannschaften B, C und D untereinander.

Das Ereignis SRR

Ein Mannschaft kann zwei Remis und einen Sieg auf $\binom{3}{1} = 3$ verschiedene Weisen erspielen. Wir nehmen vereinfachend an, dass A das Vorrundenspiel gegen D gewinnt und sich mit den Mannschaften B und C jeweils die Punkte teilt. Nach den Spielen mit Beteiligung von A haben somit B und C jeweils 1 Punkt, während D punktlos am Tabellenende steht. Ein direktes Ausscheiden von Team A ist bei noch 9 maximal zu vergebenen Punkten nicht mehr möglich, da es nicht mehr von zwei Mannschaften überholt werden kann. Damit ist ein Ausscheiden nur denkbar, wenn mindestens drei Mannschaften genau 5 Punkte erzielen. Da D durch seine beiden Partien nicht auf 5 Punkte kommen kann, bleibt nur noch der Fall, dass A, B und C 5 Punkte erreichen. Damit sind aber die Partien $B-C$, $B-D$ und $C-D$ festgelegt, da B und C je ein Remis und einen Sieg benötigen, gegeneinander also unentschieden spielen und D jeweils bezwingen.

Somit gibt es von den $3^3 = 27$ Tabellenkonstellationen, die zu den angenommenen Spielausgängen von A "passen", nur eine, in der A nicht mit Erfolgsfaktor 1, sondern lediglich $\frac{2}{3}$ weiterkommt. Dies liefert insgesamt

$$\begin{aligned} P(A|SRR) &= \frac{P(A \cap SRR)}{P(SRR)} \\ &= \frac{\binom{3}{1} \cdot p \cdot \left(26 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{2}{3}\right)}{\binom{3}{1} \cdot p \cdot 27} = \frac{80}{81}. \end{aligned}$$

Das Ereignis SSN

Auch für dieses Ereignis gibt es drei Möglichkeiten, wie die Vorrundenspiele von A ausgehen können. Wir gehen davon aus, dass A kein Spiel unentschieden spielt und ausschließlich gegen B verliert. Auch in diesem Fall kann A nur noch von Team B überholt werden, C und D können selbst bei maximaler Punktausbeute allenfalls punktemäßig mit A gleichziehen, allerdings nicht beide. Team A kann also ein Scheitern in der Vorrunde dann und nur dann ereilen, wenn 3 der 4 Mannschaften genau 6 Punkte haben. Dies bedeutet aber insbesondere, dass in den 6 Spielen die Maximalpunktzahl von 18 Punkten vergeben wird, also kein Remis vorkommt. Da neben Team B nur C oder D 6 Punkte erspielen kann, gibt es zwei Tabellenkonstellationen (nämlich $B-C$ 1, $B-D$ 2, $C-D$ 2 oder $B-C$ 2, $B-D$ 1, $C-D$ 1) mit Erfolgsfaktor $\frac{2}{3}$, in allen übrigen ist dieser Faktor 1. Analog zu der Berechnung von $P(A|SSN)$ erhält man

$$P(A|SSN) = \frac{\binom{3}{1} \cdot p \cdot \left(25 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{2}{3}\right)}{\binom{3}{1} \cdot p \cdot 27} = \frac{79}{81}.$$

Das Ereignis RRR

In diesem Szenario liegen die Ergebnisse der Vorrundenspiele von A fest. Ein Weiterkommen als eines der punktbesten Teams ist A nur möglich, wenn alle Teams 3 oder weniger Punkte aufweisen. Dies hat zur Folge, dass alle Teams 3 Punkte erreichen, da in 6 Vorrundenspielen mindestens 12 Punkte ausgeschüttet werden! Somit enden alle Partien der Vorrundengruppe unentschieden und in dieser einen (von 27 möglichen) Tabellenkonstellationen erreicht Team A mit dem Erfolgsfaktor $\frac{1}{2}$ die Hauptrunde.

Gibt es aber eine Mannschaft, die mehr als 3 Punkte erreicht, so muss dies die einzige sein - andernfalls scheidet A aus! Nimmt man an, dass B dieses Team ist, so sind folgende drei Fälle zu betrachten:

- Fall 1: B hat insgesamt 4 Punkte,
- Fall 2: B hat insgesamt 5 Punkte,
- Fall 3: B hat insgesamt 7 Punkte.

Bevor die einzelnen Fälle betrachtet werden, kann man festhalten, dass das Spiel der Mannschaften C und D gegeneinander unentschieden enden muss, andernfalls hätte eine dieser beiden Teams mindestens 4 Punkte und A würde ausscheiden.

Im ersten Fall scheidet A aus, da B eines seiner Spiele gegen C und D verliert und daher eine der Mannschaften C und D mindestens 4 Punkte aufweist. Hat Team B 5 Punkte, so gewinnt es ein Spiel (ohne Einschränkung nehmen wir an, dies sei gegen C der Fall) und spielt ein weiteres Mal Remis (gegen D). Folglich liegen A und D punktgleich auf dem 2. Platz. Wegen der Symmetrie in den Betrachtungen (Auswahl Team B, Auswahl Team C) gibt es also 6 Tabellenkonstellationen, in denen A mit Erfolgsfaktor $\frac{1}{2}$ als Gruppenzweiter (mit der zweithöchsten Punktzahl) weiterkommt. Im dritten und letzten Fall kommt A mit Erfolgsfaktor 1 in die nächste Runde, da C und D beide nur 2 Punkte erspielen. Da Team B "frei" gewählt ist, ist dies in 3 Tabellenkonstellationen der Fall.

Wie in den vorher diskutieren Ereignissen SRR und SSN folgt insgesamt

$$P(A|RRR) = \frac{p \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1\right)}{p \cdot 27} = \frac{13}{54}.$$

Tatsächlich zeigen diese Überlegungen, dass mit zwei Siegen und einer Niederlage trotz höherer Punktzahl ein Vorrundenaus wahrscheinlicher ist als bei zwei Remis und nur einem Sieg - wenngleich ein Scheitern in beiden Fällen eher unwahrscheinlich ist. In Tab. 2 sind die so ermittelten Wahrscheinlichkeiten $P(A|X)$ sowie die relativen Häufigkeiten $h(X)$, die sich aus der Analyse der 6 WMs 1994-2014 ergeben, zusammengefasst.

Ereignis X	$\mathbf{P(A\|X)}$	$\mathbf{h(X)}$
R R N	$\frac{1}{81}$	0
S N N	$\frac{2}{81}$	0
R R R	$\frac{13}{54}$	$\frac{2}{3}$
S R N	$\frac{44}{81}$	$\frac{18}{35}$
S R R	$\frac{80}{81}$	1
S S N	$\frac{79}{81}$	$\frac{19}{21}$

Tab. 2: Vergleich von $P(A|X)$ und $h(X)$ für WMs 1994-2014

Ebenso wie die drei diskutierten Ereignisse lassen sich auch die übrigen Ereignisse elementar berechnen, mitunter sind aber die Überlegungen umfangreicher, besonders bei Ereignissen mit den "mittleren" Punktzahlen 3 und 4 ist dies der Fall. Dies liegt daran, dass mit diesen Punktzahlen sowohl ein Ausscheiden als auch ein Weiterkommen deutlich wahrscheinlicher ist als ein Ausscheiden in den oben behandelten Fällen SRR und SSN.

Tab. 2 zeigt das zu erwartende Bild, da die Chance auf einen Hauptrundeneinzug mit steigender Punktzahl größer wird, einzige Ausnahme bildet der "Übergang" von SRR zu SSN. Auffallend ist auch die Diskrepanz zwischen den Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse RRR und SNN, die die gleiche Punktzahl ergeben. Unter den getroffenen, vereinfachenden Annahmen ist dieses Resultat dadurch zu erklären, dass im Fall SNN in drei Spielen mit Beteiligung von A schon 9 Punkte, im Fall RRR nur 3 Punkte vergeben werden. Damit sind für die übrigen Teams im Fall SNN die Chancen höher, mehr Punkte als A zu erreichen.

Untersucht man die 6 Ereignisse auf gleiche Weise für die 2-Punkte-Regel und vergleicht die berechneten Wahrscheinlichkeiten $P_2(A|X)$ (für ein Weiterkommen als Gruppenerster/ zweiter) mit den Häufigkeiten $h_2(X)$, die sich aus der Auswertung der WMs der Jahre 1982-1990 ergeben, so erhält man ein ähnliches Bild (vgl. Tab. 3).

Die vereinfachende Annahme gleichstarker Mannschaften ist eine Erklärung für die Diskrepanz der berechneten Werte gegenüber den tatsächlichen Daten aus der WM-Historie. Verzichtet man auf diese Einschränkung und arbeitet - wie in der Realität gegeben - mit unterschiedlichen Leistungsstärken, so sind "bessere Ergebnisse" zu erwarten, allerdings werden die dazu notwendigen Berechnungen umfangreicher, so dass sich dann der Einsatz von geeignter Software anbietet.

Ereignis X	$\mathbf{P_2(A\|X)}$	$\mathbf{h_2(X)}$
R R N	$\frac{1}{81}$	0
S N N	$\frac{2}{81}$	0
R R R	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
S R N	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{14}$
S R R	$\frac{80}{81}$	1
S S N	$\frac{79}{81}$	$\frac{9}{10}$

Tab. 3: Vergleich von $P_2(A|X)$ und $h_2(X)$ für WMs 1982-1990

4 Hinweise zum Softwareeinsatz

Die vorgestellten Ereignisse (SRR, SSN und RRR) konnten alle durch kombinatorische Überlegungen ohne Softwareeinsatz bestimmt werden. Bei den übrigen Ereignissen, insbesondere denjenigen, bei denen sowohl ein Ausscheiden als auch ein Weiterkommen "realistisch" ist, ist eine solche Argumentation mit kombinatorischen Argumenten etwas aufwendiger, so dass sich da der Einsatz von Software, etwa eines Tabellenkalkulationsprogramms wie z.B. Excel, anbietet.

Dabei sind die Vorrundenergebnisse des ausgewählten Teams (bei uns A) gegen die Gruppengegner vom Benutzer einzugeben. Die aus den 3 Spielergebnissen gehörenden Punktzahlen $z_A, \ldots, z_D$ werden berechnet. Für die übrigen Gruppenspiele der Mannschaften B, C und D untereinander wird dann eine Tabelle mit $3^3 = 27$ Zeilen angelegt. In jeder dieser 27 Zeilen wird den Teams B, C und D eine Punktzahl w_b, w_C und w_D zugewiesen, je nach vorliegendem Ausgang der Spiele dieser Teams untereinander. Insgesamt werden also jedem möglichen Ausgang der drei Spiele $B-C$, $B-D$ und $C-D$ die Punktzahlen aller Gruppengegner ermittelt und in der jeweiligen Zeile in vier Spalten erfasst. Für das Programm Excel kann man mit Hilfe der `rang`-Funktion dann den Rang des Teams A bestimmen. Die `zählenwenn`-Funktion erlaubt es, die Anzahl der mit A punktgleichen Mannschaften zu bestimmen. Mit diesen beiden Informationen kann durch eine geschachtelte `wenn`-Konstruktion gemäß der obigen Ausführungen der Erfolgsfaktor ermittelt werden.

Hat man aber für jedes mögliche der 27 Tabellenbilder, die zu den gewählten Ergebnissen der Partien $A-B$, $A-C$ und $A-D$ gehören, den Erfolgsfaktor (für das Team A) ermittelt, lässt sich (wie in den beschriebenen Ereignissen SRR, SSN und RRR durchgeführt) für jedes Ereignis X die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(A|X)$ berechnen, indem man die 27 Erfolgsfaktoren aufsummiert und durch 27 dividiert.

5 Ausblick zu möglichen Variationen

Findet man das Thema für eine Implementierung im Unterricht so interessant, dass eine eingehendere und vertiefte Beschäftigung damit erfolgt, können eine Reihe von Fragen auftreten bzw. ist es durchaus möglich, dass man die grundlegende Idee der 3-Punkte-Regel zu hinterfragen beginnt. Aus unserer Perspektive ist es durchaus vorstellbar, dass folgende Ideen bzw. damit verbundene Fragestellungen tiefergehender aufgegriffen werden könnten:

- Anpassung für andere Turnier-Modi

Eine Adaption könnte darin bestehen, dass nicht nur die Fokussierung - wie in diesem Beitrag - auf die Gruppenerst- und zweitplatzierten erfolgt, sondern auch die Gruppendritten in die (notwendigen) Überlegungen einbezogen werden. Diese Vorgehensweise ist z.B. bei einer Thematisierung von Fußballeuropameisterschaften notwendig.
Um die Frage des Weiterkommens als einer der vier besten Gruppendritten zu klären, ist eine "gruppenübergreifende" Betrachtung erforderlich. Laut des Reglements der UEFA-Fußball-Europameisterschaft (vgl. UEFA (2017)) ist es für die Achtelfinalpartien nur wichtig, zu diesen 4 besten Gruppendritten zu zählen. Die Zuteilung im Spielplan erfolgt nämlich für jede der $\binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten, aus welchen der 6 Gruppen die 4 besten Gruppendritten kommen können, unabhängig von der Rangfolge der vier besten Gruppendritten.
An der Fussball-WM 2026 nehmen erstmals 48 Mannschaften teil, wodurch sich der Turniermodus ändert. Es ist vorgesehen, zunächst 16 Dreiergruppen zu bilden, in denen jeweils die beiden besten Mannschaften weiterkommen, anschließend soll im K.o.-System der Weltmeister ermittelt werden. Neben der Untersuchung dieses neuen Modus ist es analog zu den hier gezeigten Überlegungen vorstellbar, sich Gedanken zu einem alternativen Turnier-Modus zu machen.

- Berücksichtigung der Mannschaftsstärken

Die Annahme gleichstarker Teams ist in der Realität nicht gegeben. Dieser Tatsache könnte man dadurch Rechnung tragen, dass die teilnehmenden Mannschaften in unterschiedliche "Stärkeklassen" eingeteilt werden. Dann werden die Spielausgangswahrscheinlichkeiten für die Spiele dadurch festgelegt, in welchen Klassen die Gegner sind. Zu berücksichtigen wäre hierbei, dass höhere Spielklassen bessere Quoten und somit höhere Wahrscheinlichkeiten für den Sieg liefern und sich dieser Unterschied verstärkt, je größer die Diskrepanz zwischen den Gegnern ist. Bei dieser Vorgehensweise sind damit die 729 möglichen Gruppenausgänge nicht mehr alle gleichwahrscheinlich, so dass bei der Berechnung der Weiterkommenenswahrscheinlichkeiten die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden müssen, wodurch sich der Rechenaufwand erhöht.
Verwendet man "echte" Quoten (wie sie Wettbüros verwenden), nimmt dieser Rechenaufwand weiter zu. Ein erster Ansatz dazu ist in Siller, Habeck, Almaci und Fefler (2015) zu finden. Hierbei ist jedoch grundsätzlich für die Unterrichtspraxis zu berücksichtigen, dass Quoten erst recht spät "gezogen" werden können und somit auch die Planung für den unterrichtlichen Einsatz vergleichsweise kurz ist. Zudem ist es notwendig, den Zusammenhang zwischen realen Quoten und gewinnbereinigten Wahrscheinlichkeiten zu erarbeiten, da die z.B. im Internet abrufbaren Quoten noch die Gewinnmarge des Anbieters enthalten. Dadurch dass für jedes Vorrundenspiel eigene Ausgangswahrscheinlichkeiten gegeben sind, ist jetzt ein Softwareeinsatz unerlässlich - auch bei den "einfachen" Ereignissen SRR oder SSN.

6 Schlussbemerkungen

Wir haben in diesem Beitrag mit Hilfe elementarer und naheliegender Überlegungen gezeigt, wie das Thema Mathematik und Fußball aus der Sicht der Punkte-Regel thematisiert werden kann. Die hier durchgeführten Überlegungen sind einerseits aus der Analyse vergangener Turniere entstanden, andererseits beinhalten sie aber Annahmen, die für die getroffene Modellierung notwendig sind, um das Thema im Mathematikunterricht auch noch besprechen zu können. U.E. kann dieser Ansatz für interessierte Lernende dahingehend genutzt werden, als er realitätsbezogenen und durch einen etwas anderen

Blickwinkel in Inhalte der Kombinatorik und elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung einführt.
Die hier dargelegte Umsetzung kann auch abgewandelt für den Mathematikunterricht aufbereitet werden, wenn die umfassenden Recherchetätigkeiten nicht von den Lernenden geleistet werden müssen. So ist es möglich das hier vorgestellte Problem auch in kleinere Teilfragen zu zerlegen, die in einzelnen Unterrichtseinheiten zu 45 Minuten umfassend besprochen werden können:

- Analyse der historischen Ergebnisse: wenn die Ergebnisse der Fußballturniere für Lernende aufbereitet wird, kann diese Analyse durch Strichlisten oder andere (graphische) Aufbereitungen mit Lernenden besprochen werden.

- Kombinatorische Überlegungen: Wenn für Lernende die $6^3 = 729$ Tabellenbilder aufbereitet werden, ist es möglich, direkt nach dem Erreichen der Punkte zu fragen, sodass z.B. konkrete Fragen wie "In wie vielen der 729 Tabellenbilder werden 5 Punkte erreicht?" besprochen werden können.

- Wahrscheinlichkeit vs. bedingte Wahrscheinlichkeit: Werden die kleinschrittigen Überlegungen in der eben angesprochenen Form diskutiert, besteht auch die Möglichkeit zu hinterfragen, warum nur unter Zuhilfenahme der bedingten Wahrscheinlichkeit der Einzug mit 5 Punkten in die Hauptrunde wahrscheinlicher ist als mit 6 Punkten.

Berücksichtigt man reale Wettquoten, werden zwar die Berechnungen umfangreicher und erfordern den auch den Einsatz von Software, bieten aber so andererseits die Chance zum fächerübergreifenden Unterricht mit z.B. der Informatik.

Literatur

Danckwerts, R., Vogel, D. (1985): Abzählen rund um den Fussball. Anregungen für Kombinatorikstunden in der Oberstufe. In: *Praxis der Mathematik*, Vol. 27 (3), S.151-152, 169.

Lambert, A, (2014): Fußballsammelbilder würfeln - manchmal dauert's länger als man denkt. In: *Praxis der Mathematik in der Schule*, Vol. 56 (57), S. 45-47.

Ludwig, M. (2006): Fussball-Mathematik. In: *Mathematik lehren*, Vol. 135, S. 22-46.

Ludwig, M. (2014): Fußballfragen und Weltranglisten-Algorithmus. In: *Mathematik lehren*, Vol. 31 (182), S. 50-51.

Schwarz, W. (2000): Ein einfaches Poissonmodell für Ligawettbewerbe im Sport. In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, Vol. 53 (3), S. 146-151.

Siller, H.-St., Maaß, J. (2009): Fußball EM mit Sportwetten. In Brinkmann, A., Oldenburg,R. (Hrsg.). ISTRON-Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 14, S.95-112. Hildesheim: Franzbecker.

Siller, H.-St., Habeck, D., Almaci, S., Fefler, W. (2015): Sportwetten und Großereignisse als Chance. In: *Praxis der Mathematik in der Schule*, Vol. 57 (66), S.42-46.

Strick, H. K. (1982): Fussball-Bundesliga und Stochastik-Unterricht. In: *Praxis der Mathemati*k, Vol. 24 (9), S. 269-276.

UEFA (2017): Reglement der UEFA-Fußball-Europameisterschaft, http://de.uefa.org/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/03/92/83/2039283/DOWNLOAD.pdf (Zugriff: 01.4.2017)

Anschrift der Verfasser
Daniel Habeck
Mathematisches Institut
Universität Koblenz-Landau, Campus Koblenz
56070 Koblenz
dhabeck@uni-koblenz.de

Anschrift der Verfasser
Hans-Stefan Siller
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg
97074 Würzburg
hans-stefan.siller@mathematik.uni-wuerzburg.de